



TITLE:

内生的な景気循環と3つの経済的な
歪み (マクロ経済動学の非線形数理
)

AUTHOR(S):

後閑, 洋一

CITATION:

後閑, 洋一. 内生的な景気循環と3つの経済的な歪み (マクロ経済動学の非線形数理). 数理解析研究所講究録 2011, 1768: 55-72

ISSUE DATE:

2011-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171462>

RIGHT:

内生的な景気循環と 3 つの経済的な歪み

立命館大学 経済学部

後閑 洋一

本稿では経済変動の要因が何であることを理論的に証明する。一般に完全競争の前提条件が満たされている経済において安定的な成長 (Stable growth) が実現する。しかしながら政府部門、消費および生産における外部性などの経済的な歪み (Economic distortions) を 1 つでも考慮すると内生的な経済変動 (Endogenous fluctuations) が容易に起こりうる。よって本稿の目的は 2 期間の世代重複モデル (Overlapping generations model) を用いて上記の 3 つの歪みの存在ゆえに景気循環が起こりうることを理論的に証明することである。

1. モデルの基本構造

ライヒリン (Reichlin) により考案された 2 期間の世代重複モデル (JET, 1986) を考える。そのモデルとは、各世代の経済主体について、彼らは 2 期間生存し、人口規模は 1 に正規化され、以下で示されるように消費者、企業家および政府が存在する。

消費者 (Consumers)

消費者は 2 期間 (若年期と老年期) 生存するが、彼らは老年期 (Old period) のみの消費に関心があり、それゆえ若年期 (Young period) において得た労働所得 (Wage income) を全て貯蓄する。ここでは老年期 (Old period) において彼らは引退し、労働は行わない。よって若年期に行った貯蓄を切り崩すことにより老年期の消費を行うのである。(2)と(3)式をみよ。また、消費者は他人の消費水準に関心 (消費の外部性) がある。よって消費者の目的関数である効用関数は以下ようになる。

$$\frac{(c_{t+1} \cdot C_{t+1}^{\theta})^{1-\phi}}{1-\phi} - \frac{l_t^{1+\zeta}}{1+\zeta} \quad (1)$$

l_t は若年期の労働供給量, c_{t+1} は老年期の消費量, C_{t+1} は $t+1$ 期の平均的(公的)な消費量,

θ が消費の外部性の度合いを表す。よって $\theta > (<) 0$ のとき正(負)の消費の外部性が存在し、他人の消費の増大に対し敬意(嫉妬)の念を表しているケースにあたる。ただし、消費の外部効果の度合いについて私的な消費の限界効用の符号を逆転させてしまうほどは大きくないものとする。対称均衡において $c_{t+1} = C_{t+1}$ が成立していることに注意すると、その条件は以下のようなになる。

仮定 1: $1 + \theta > 0$

以下の2式が消費者の制約式に相当する。

$$s_t = w_t l_t, \quad (2)$$

$$c_{t+1} = [1 - \delta + (1 - \tau_{r+1}) \cdot r_{t+1}] s_t, \quad (3)$$

ただし

w_t = 賃金率, s_t = 貯蓄量, r_{t+1} = 資本のレンタル料 (貯蓄からの純収益率), δ = 資産の減耗率 である。

消費者は(2)と(3)式の予算制約式に従い(1)の効用関数を最大にするよう行動する。この最適化問題を解くと以下の式が得られる。

$$l_t = c_{t+1}^{\Psi} \cdot C_{t+1}^{\theta}$$

$$\text{ただし, } \Psi \equiv \frac{1-\phi}{1+\xi} \quad \text{である。} \quad (4)$$

(2), (3) と (4)式から賃金に対する労働供給の弾力性 (Labor supply elasticity) は $\Psi / (1 - \Psi)$ となる。よってその値が正となるように以下のことを仮定する。

仮定 2: $0 < \Psi < 1$ (i.e., $0 < \phi < 1$ and $\xi > 0$).

企業 (Firms)

企業の行動について考える。代表的な企業は資本 (k_t) と労働 (l_t) を組み合わせて生産物 (y_t) を生み出す。生産はコブ・ダグラスの技術 (Cobb-Douglas technology) に従って行われるものとする。

$$y_t = A_t k_t^a l_t^b, \quad a + b = 1 \quad (5)$$

また、技術パラメータの A_t は、経済における平均的な資本と労働量に依存する。すなわち生産における正の外部性が存在する。 A_t は以下のような式を満たすとする。

$$A_t = \bar{k}_t^{\lambda} \cdot \bar{l}_t^{\epsilon}$$

上式について平均的な資本量は生産経験の尺度となり、平均的な労働に関してはその値が

大きければ企業にあった人材を見つけやすいという理由から (6) 式のような定式化が可能となる。

企業の利潤最大化条件より、

$$r_t = aA k_t^{\alpha-1} l_t^{\beta} \equiv r(k_t, l_t) \quad \text{と} \quad w_t = bA k_t^{\alpha} l_t^{\beta-1} \equiv w(k_t, l_t) \quad (6)$$

となる。ただし、企業は外部性である A_t を所与のものとして利潤最大化を図っている。(すなわち各企業は外部性の内部化を行っていない。) 対称均衡において

$$l_t = \bar{l}_t \quad \text{かつ} \quad k_t = \bar{k}_t$$

が成立している。

政府 (Government)

政府行動について考える。内生的な資本所得税率 (Endogenous capital income taxes) と外生的な資本所得税率 (Fixed tax rates on capital income) について考え、単純化のためそれ以外の税を無視して分析を行う。政府支出は資本所得税によってのみまかなわれるものとする。そのとき政府の予算制約式 (Budget constraint) は以下ようになる。

$$g_t = \tau_{\pi} \cdot r_t k_t. \quad (7)$$

もし政府が支出を一定 ($g_t = g$) に保ったなら (7) 式、すなわち政府の予算を満たすように資本所得税率が内生的に決定する。それに対して、政府が税率を一定 ($\tau_{\pi} = \tau_r$) に保ったなら、(7) 式は政府予算を満たすために支出がどのような値をとらなければならないかを表している。すなわち支出が内生変数となる。

市場均衡 (Market equilibrium)

政府の予算制約政策と消費および生産の外部効果に注意して市場の均衡条件を導出する。対称均衡 $c_{t+1} = C_{t+1}$ において (4) 式は以下のように書きなおせる。

$$\begin{aligned} l_t &= c_{t+1}^{\Psi(1+\theta)} \\ &\equiv \Psi(c_{t+1}). \end{aligned} \quad (4)'$$

消費者が若年期 (t 期) に行った貯蓄 s_t が資産投資に等しくなるとき財市場は均衡している。注意すべきは t 期における資産投資は新規投資、 $k_{t+1} - (1-\delta)k_t$ と t 期の老人 ($t-1$ 世代) から購入する中古の資本、 $(1-\delta)k_t$ の和となることである。ゆえに $s_t = k_{t+1}$ が均衡式となり、(2), (4), (6) と (7) を用いてそれを表現すると

$$w(k_t, \Psi(c_{t+1})) \cdot \Psi(c_{t+1}) = k_{t+1}. \quad (8)$$

となる。なお、(8) 式は2つの予算制約政策において共通して成立する式である。

(3), (4), (6), (7) と $s_t = k_{t+1}$ を用いて

$$\left[r(k_t, \Psi(c_{t+1})) + 1 - \delta \right] \cdot k_t = c_t + g, \quad (9-1)$$

を得る。(9-1) 式は与えられた政府支出にたいして資本所得税が毎年の政府の予算が満たされるよう内生的に決定する(内生的な資本所得税率の)ケースに対応している。

(3), (4), (6) と $s_t = k_{t+1}$ から

$$\left[(1 - \tau_r) r(k_t, \Psi(c_{t+1})) + 1 - \delta \right] \cdot k_t = c_t. \quad (9-2)$$

を得る。(9-2) 式は資本所得の税率が一定値 $\tau_{rt} = \tau_r$ に保たれており、毎年の政府の予算を満たすように支出が内生的に決定する(外生的な資本所得税率の)ケースに相当する。

ゆえに内生的[外生的]な資本所得税率のケースにおいて、(8) と (9-1) [(9-2)]式から消費と資本ストック (c_t, k_t) の時間的経路が決定する。

2. 定常状態 (Steady states)

それぞれの政府予算制約政策のもと定常解が存在するかどうかを考える。全ての経済変数が時間を通じて一定値をとるとき、経済は定常状態にあると考えられる。そのとき $c_t = c_{t+1} = c^*$ と $k_t = k_{t+1} = k^*$ が成り立つ。(ただし、 x^* は変数 x の定常値を示す。)

最初に資本所得税率が内生化されたケースを考える。(8) と (9-1) 式より定常値 (k^*, c^*) は以下の式を解くことにより得られる。

$$bA(k^*)^{\alpha-1} (c^*)^{\beta \Psi(1+\theta)} = 1, \quad (10-1)$$

$$\left[\frac{a}{b} + (1 - \delta) \right] k^* - g = c^*. \quad (10-2)$$

上2式より定常解の存在に関して以下のように要約できる。

命題 1 (内生的な資本所得税率): $\alpha < 1$ であるなら政府支出の大きさが極端に大きくなければ、2つの定常解 (Multiple steady states) が存在する。

証明: 図1を参照のこと。

図1は政府支出が $0 < g < g_s$ の範囲にあるとき2つの定常解が存在し、 $g > g_s$ の範囲にあるときは定常解が存在しないことを示している。(政府支出が g_s に等しいとき2つの定常解が1つに合体する。)

次に資本所得税率が時間を通じて一定に保たれているケース ($\tau_n = \tau_r$) を考える。このとき政府支出が毎年の政府予算を満たすように内生的に決定している。そのとき定常解は以下の2つの式を解くことにより得られる。

$$bA(k^*)^{\alpha-1}(c^*)^{\beta\Psi(1+\theta)} = 1, \quad (10-1)$$

$$\left[(1-\tau_r) \cdot \frac{a}{b} + (1-\delta) \right] k^* = c^*. \quad (11)$$

命題2 (固定された資本所得税率) : 0 と 1 の間をとる税率に対して定常解は一意的に存在する。

証明：図2を参照のこと。

命題1と2から資本所得税を一定に保つ政策により、貧困の罠 (Poverty traps) に相当する低位の定常均衡 (Low steady state) が取り除かれていることに注意する必要がある。資本所得税率が内生化されているとき定常解が2つ存在し、外生的な資本所得税率のときは1つのみ存在するという点に対して経済的にいかなる説明が可能なのであろうか？資本所得税率を横軸に資本所得税収を縦軸にとるとラフア・カーブが描け、図3と4よりなぜ所得税率が内生化されたときのみ内生変数に関する複数定常均衡が生じうるのか理解できる。

3. 資本所得税率と局所的な安定性

内生的な資本所得税率のケースにおいて定常解が2つ存在しうることが判明した。本節ではそれぞれの定常解の局所的な安定性 (Local stability) について考える。議論の論点を明確にするため3節のみ生産と消費の外部性はゼロであると仮定する。

仮定3 : $\theta = 0$, $\alpha = a$ かつ $\beta = b$

(8) と (9-1) 式を定常状態 (k^*, c^*) で線形近似 (Linearization) を行くと以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_{t+1} - k^* \\ c_{t+1} - c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a\Psi \cdot (k^*/c^*)} & -\frac{\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)(1-\delta)}{\Psi \cdot (k^*/c^*)} \\ \left(\frac{b}{a}\right) & -\left(\frac{b}{a}\right)(1-\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{bmatrix}. \quad (12)$$

(12) 式の行列式のトレース (T) とディターミナント (D) を計算すると以下のよう

になる.

$$D = \left(\frac{1}{\Psi} \right) \cdot \left(\frac{c^*}{k^*} \right) > 0, \quad (13-1)$$

$$T = \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{\Psi} \right) \left(\frac{c^*}{k^*} \right) - \left(\frac{b}{a} \right) \cdot (1 - \delta). \quad (13-2)$$

(13) 式より政府支出 g の値を変化させると定常状態における消費 - 資本比率 (c^*/k^*) を通じて (T, D) の値に影響を与える. いうまでもなくトレースは行列式の二つの固有値 (characteristic roots) の和を表し, デターミナントはそれらの積を表す. ゆえに定常解の近傍における経済変数の動学経路 (dynamical path) を知るためには (13) 式の大きさを調べなければならない. その前に以下のことを定義しておく.

定義 1 : 図 1 において小さいほうの定常解を (k_1^*, c_1^*) とし, 大きいほうの定常解を (k_2^*, c_2^*) とする.

また, (13) 式より以下 2 つのレンマが得られる.

レンマ 1 : 政府支出 g の大きさにかかわらず (T_i, D_i) は直線 Δ 上に位置する.

$$\Delta : D_i = a \left[T_i + \left(\frac{b}{a} \right) (1 - \delta) \right] \quad (i=1, 2)$$

レンマ 2 : $0 < g < g_s$ の範囲において $D_1 > T_1 - 1$ かつ $D_2 < T_2 - 1$ が成立する. さらに $g = g_s$ に対して $D_i = T_i - 1$ が成立する.

証明 : Appendix 1 を参照のこと.

ここで以下のことを仮定する.

$$\text{仮定 4 : } \delta \rightarrow 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

ここで考えているモデルは世代重複モデルなので 1 期間のタイムスパンは 30 ~ 40 年ぐらいの期間と考えるのが妥当である. よって資本の減耗率 δ は十分 1 に近いと考えられる. また, a は生産における資本のシェアを表し, 実証研究ではその値は 1/3 前後であると考えられるので, 仮定 2 は現実的な整合性をもつ.

仮定 2 よりライン Δ の位置は図 5 のように示せ, $0 < g < g_s$ である限り, 図 5 より以下の命題が示せる.

命題 3 : 高位の定常均衡 (k_2^*, c_2^*) は常に鞍点 (Saddle point) であるが, 低位の定常均衡 (k_1^*, c_1^*) は常に完全安定 (Sink) であり定常解へ収束する経路は無数に存在し (Indeterminacy), よってその近傍において内生的な経済変動が生じる. 証明 : 高位(低位)の定常均衡で評価された (T, D) はライン Δ の実線(点線)部分の

どこかに存在することより明らかである。図5を見よ。

複数の定常均衡解 (Multiple steady states) の存在は初期の所得水準がほとんど同じである2国について、ある国が高位の定常均衡へ通ずる経路を選択し、別の国は低位の定常均衡 (Poverty traps) へ達する経路を選択した場合、長期的に決して消滅し得ない所得格差が生じることを示唆している。

次に資本所得税率が時間を通じて一定値 $\tau_r = \tau_r$ に固定され、政府支出が毎年の政府の予算を満たすように内生的に決定するケースを考える。2節より $0 \leq \tau_r < 1$ の範囲において定常解は一意的に存在する。その定常解 (k^*, c^*) の局所的な安定性を考える。

そのための手段として、定常状態で (8) と (9 - 2) 式を線形近似すると、その近傍において経済変数 (k_t, c_t) は時間を通じて以下の式を満たすよう変化する。

$$\begin{bmatrix} k_{t+1} - k^* \\ c_{t+1} - c^* \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{bmatrix},$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-\tau_r)a\Psi \cdot (k^*/c^*)} & -\frac{\left[(1-\tau_r)\left(\frac{a}{b}\right)a + (1-\delta)\right]}{a(1-\tau_r)\Psi \cdot (k^*/c^*)} \\ \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{1-\tau_r} & -\frac{(1-\delta)\left(\frac{b}{a}\right)}{a(1-\tau_r)} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

である。(14)から行列式 A のディターミナント (D) とトレース (T) は

$$D = \left(\frac{1}{\Psi}\right) \frac{1}{(1-\tau_r)(k^*/c^*)} > 0, \quad (15-1)$$

$$T = \left(\frac{1}{\Psi}\right) \frac{1}{a(1-\tau_r)(k^*/c^*)} - \frac{b(1-\delta)}{a(1-\tau_r)}, \quad (15-2)$$

となる。

仮定4の成立の有無に関わらず (15) 式から以下の命題が得られる。

命題4：局所的な安定性は鞍点 (Saddle) であり、定常解へ収束する経路は一意的 (Determinacy) である。よって定常状態近傍において内生的な経済変動は一切生じない。

証明：(15 - 1) と (15 - 2) を組み合わせ、(11) 式を代入すると

$$D - T + 1 = \left[\frac{a + b\Psi - 1}{b\Psi} \right] \left[1 + \left(\frac{1}{1-\tau_r} \right) \left(\frac{b}{a} \right) (1-\delta) \right] < 0$$

を得る。よって上式と (15-1) 式より定常状態の安定性は鞍点 (Saddle point) である。

命題 4 より安定根は 0 と 1 の間の値をとり、ゆえに経済変数は定常値へ単調に (変動することなく) 収束する。よって税率を一定値に固定し、政府の毎年の予算を満たすよう政府支出で調整する経済は、内生的な経済変動を引き起こすことなく安定的な成長をもたらすことが証明された。

それではなぜ上記のような結論が得られたのであろうか？それを理解するために本稿で取り扱っているモデルにおいて非決定性が生じるメカニズムを明らかにする必要がある。いま経済主体が将来的に資本の収益率が上昇し老年期により大きな消費が可能であると期待しているとする。すると (4) 式より若年期に多く労働を行い、多くの貯蓄を行なう。すなわちより多くの資本投資を実施するのである。もし来期に資本の収益率が上がれば、その期待は自己実現的 (Self-fulfilling expectations) なものとなり均衡の非決定性 (Indeterminacy of equilibria) が生じうるということになる。

内生的な資本所得税率のときより多くの資本投資は資本所得を引き上げ、政府の予算制約式 (7) 式より税率の低下を意味する。よって資本投資により資本の収益率が減少した¹としても税引き後の資本の収益率が上昇し、均衡の非決定性が生じることが可能なのである。

それに対して、外生的な資本所得税率のケースは税率が一定値に固定されているので資本投資が上昇すると必ず税引き後の資本の収益率は減少し、期待が自己実現的なものにはなりえず、ゆえに決して均衡の非決定性は生じ得ないのである。

4. 消費の外部性と局所安定性

本節では政府支出および生産における外部性の大きさがゼロであり消費の外部性のみ存在する経済の定常解の安定性 (Local stability) について考える。よって本節では仮定 3 に変わり以下のことを仮定する。

仮定 3': $g = 0$ または $\tau_r = 0$ かつ $\alpha = a, \beta = b$ 。

そのためには (7) と (8) 式を定常状態 (k^*, l^*) で線形近似 (Linearization) を行くと以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_{t+1} - k^* \\ l_{t+1} - l^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b\left(\frac{k^*}{l^*}\right) \\ -\left[1 - \delta + a\left(\frac{a}{b}\right)\right]\left(\frac{l^*}{k^*}\right) - \left(\frac{b}{a}\right)(1 - \delta) - a + \frac{1}{\Psi(1 + \theta)} \frac{1}{a} \left[1 - \delta + a\left(\frac{a}{b}\right)\right] & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ l_t - l^* \end{bmatrix}$$

¹ (6)式より税引き前の資本の収益率は資本ストックの減少関数である。

(10)

(10) 式の行列式のトレース (T) とディターミナント (D) を計算すると以下のようになる。

$$D = \frac{1}{\Psi(1+\theta)} \left[1 - \delta + \frac{a}{b} \right] > 0, \quad (11-1)$$

$$T = \left(1 - \delta + \frac{a}{b} \right) \left[-\frac{b}{a} + \frac{1}{\Psi(1+\theta)} \cdot \frac{1}{a} \right] + 1 \quad (11-2)$$

言うまでもなく、 D (T) は (10) 式における行列式の 2 つの固有値の積 (和) に等しい。

(11) 式より以下のレンマが得られる。

$$\text{レンマ 3 : } \frac{1}{\Psi} > (<) 1 + \theta \Leftrightarrow D < (>) T - 1$$

証明 : (11) 式より

$$D - T + 1 = \frac{b}{a} \left(1 - \delta + \frac{a}{b} \right) \left[\frac{\Psi(1+\theta) - 1}{\Psi(1+\theta)} \right]$$

が得られ、上式よりレンマ 3 は明らかに成立する。(証明終)

局所的な安定性を考えるにあたりレンマ 3 より消費者オッファーカーブである(1)式の弾力性 Ψ の大きさと消費の外部性の度合いである θ が重要であるように思える。さらに以下のレンマも成立する。

レンマ 4 : Ψ の値に関わらず (T, D) は以下の直線 Δ の上に必ず存在する。

$$\Delta : D = a \cdot T + b(1 - \delta)$$

証明 : (11-2) 式より

$$a(T - 1) + b \left(1 - \delta + \frac{a}{b} \right) = \left(1 - \delta + \frac{a}{b} \right) \frac{1}{\Psi(1+\theta)}$$

(11-1) 式より上式の右辺は D に等しい。よって Δ を得る。

(証明終)

ふたたび仮定 4 を仮定する。

$$\text{仮定 4 : } \delta \rightarrow 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

仮定 4 に注意し、レンマ 1 と 2 より定常状態近傍における安定性と Ψ と θ の関係は図 6 のようにまとめることができる。すなわち以下の命題を得る。

命題 5 : $\frac{1}{\Psi} > (<) 1 + \theta$ のとき定常解は鞍点 (沈点) であり、今期与えられた資本

に対して選択できる労働量は1つだけ(無数に)存在する. すなわち局所的に決定的(非決定)である.

証明: $\frac{1}{\Psi} > (<) 1 + \theta$ のとき (T, D) は図6におけるラインΔの実線(点線)部分のどこかに存在することより明らかである.

仮定2より $\frac{1}{\Psi}$ は1より大きくなければならない. よって消費の外部性がゼロ ($\theta = 0$) または負 ($\theta < 0$) のとき非決定性 (Indeterminacy) は決して起こりえない. それに対して消費の外部性が正 ($\theta > 0$) でありかつ $\frac{1}{\Psi} < 1 + \theta$ のとき非決定性は生じうる. すなわち, 人々が他人の消費の増大に敬意の念を持つときのみ内生的な経済変動が起こりうるということが証明されたのである.

次に結論の経済学的な解釈を考える. 消費者が来期の公的な消費が増大すると期待を修正したと仮定する. この期待が合理的なものとなり非決定性が生じるためには最終的に私的な消費が増大しなければならない. $\theta > (<) 0$ のとき, すなわち消費者が他人の消費の増大に対して敬意(嫉妬)の念を持つとき, 公的な消費 C_{t+1} が増大するという予想は(4)式より今期の労働供給を増大(減少)させる. 労働の需要曲線は右下がりなので均衡労働量は増大(減少)する. そのことにより今期の賃金所得が増大(減少)し, (7)式より資産投資が増大(減少)することにより来期の私的な消費量 c_{t+1} が増大(減少)する. よってこのとき非決定性の発生は可能(不可能)となる.

5. 生産における外部性と局所的な安定性

本節では政府支出および消費の外部性の大きさがゼロであり生産の外部性のみ存在する経済の定常解の安定性 (Local stability) について考える. 2節において定常解の一意性が判明したが, その定常解の安定性 (Local stability) について考える. そのためには(7)と(8)式を定常状態 (k^*, c^*) で線形近似 (Linearization) を行うと以下の式が得られる.

$$\begin{bmatrix} k_{t+1} - k^* \\ c_{t+1} - c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta(a/b)\Psi} \cdot \Omega & -\frac{\alpha(a/b)+1-\delta}{\beta(a/b)\Psi} \cdot \Omega \\ \left(\frac{a}{b}\right) & -\left(\frac{b}{a}\right)(1-\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{bmatrix}, \quad (10)$$

ただし $\Omega \equiv \left(\frac{a}{b}\right) + 1 - \delta$ である.

(10)式の行列式のトレース (T) とディターミナント (D) を計算すると以下のようになる.

$$D = \left(\frac{\alpha}{\beta\Psi} \right) \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right) (1-\delta) \right], \quad (11-1)$$

$$T = \left(\frac{1}{\beta\Psi} \right) + \left(\frac{b}{a} \right) (1-\delta) \left(\frac{1}{\beta\Psi} - 1 \right) \quad (11-2)$$

D (T) は (10) 式における行列式の 2 つの固有値の積 (和) に等しい. ここでも 3 と 4 章と同じく資本減耗率に関して以下の仮定を課す.

仮定 4: $\delta \rightarrow 1$ よって $0 < \left(\frac{b}{a} \right) (1-\delta) < 1$ が成立.

仮定 2 に注意し, 定常状態近傍における安定性と外部性の度合いの関係は図 7 のようにまとめることができる. 図 7 は $(\alpha, \beta\Psi)$ 平面における定常解の局所的な安定性を示している. この図より以下の命題が得られる.

命題 6: 労働の需要曲線と供給曲線が正しい交わり方をするような外部性の度合いの下, 定常解の安定性は完全安定 (Sink) となり, 定常解へ収束する経路は無数に存在する. よって内生的な経済変動が起こりうる.

証明: (2), (3) と (4) より, 労働の供給曲線は以下ようになる.

$$\ln R_{t+1} + \left(\frac{1-\Psi}{\Psi} \right) \ln l_t = \ln w_t \quad (12-1)$$

ただし $R_{t+1} \equiv 1 - \delta + r_{t+1}$ である.

また (6) 式より労働の需要関数は

$$\ln A \cdot b + \alpha \ln k_t + (\beta - 1) \ln l_t = \ln w_t \quad (12-2)$$

となる. ゆえに $\beta\Psi < 1$ の条件が (12-1) 式の傾きが (12-2) 式の傾きよりも大きい条件に対応し, 図 1 から後者の傾きが負であるような外部性の範囲内で局所的な非決定性が起こりうるのである. すなわち労働の需要曲線と供給曲線が正しい交わり方をしているにもかかわらず非決定性は生じるのである. この事実はラムゼー型の最適成長モデルと大きく異なるものである.

次に命題 6 の経済学的な解釈を考える. 図 7 より与えられた資本の外部性の度合い $[\alpha]$ に対して, 労働の外部性の度合い $[\beta]$ が大きくなれば, また, 労働供給の弾力性 $[\Psi/(1-\Psi)]$ が大きいほど定常状態の安定性が完全安定 (Sink) すなわち局所的に非決定 (locally indeterminate) となりやすくなることが分かる. 本節ではその理由を労働市場に焦点をあてて説明する. (8) と (9-3) 式を以下のように書き直す.

$$k_{t+1} = b A k_t^\alpha l_t^\beta, \quad (8)'$$

$$aAk_{t+1}^{\alpha}l_{t+1}^{\beta} + (1-\delta)k_{t+1} = l_t^{1/\Psi} \quad (9-3)'$$

経済は定常状態にあるとし、経済主体が来期に高い消費（ c_{t+1} ）を享受できると予想しているとする。（4）式の労働供給のオファーカーブよりこのとき今期の労働供給量（ l_t ）を増大させる。（9-3）'式より労働の外部性（ β ）が大きいほど来期の労働供給量（ l_{t+1} ）の上昇がより小さくなり、循環的な均衡（Cyclical equilibria）が実現しやすくなることが分かる。また、労働供給の弾力性が大きいほど今期の労働供給量がより大きく増大し、やはり循環的な均衡が生じやすくなるのである。

6. 結論（Concluding remarks）

政府部門、消費および生産における外部性のいずれも存在しない場合は定常解の近傍においては決して内生的な経済変動は生じず経済は安定的に成長していくということに注意して結論を以下のように3つの形で要約する。

① 資本所得税率

3節において政府予算の収支を均衡させるために資本所得税率で調整するケース（Endogenous capital income taxes）と政府支出で調整するケース（Fixed capital income tax rates）の2つを考察した。前者の予算制約政策においては、局所的な非決定性（Local indeterminacy）や複数定常均衡（Multiple steady states）による貧困の罠（Poverty traps）などの経済的に不安定な現象が生じた。それに対して、後者の予算制約政策においては、定常解は常に一意に存在し、かつその近傍において内生的な経済変動は決して生じ得ないことが示された。よって経済的な安定性の観点から目標とする予算を実現するためには、税率（Tax adjustments）ではなく支出（Spending adjustments）をつうじて行うことが強く推奨されるのである。

② 消費の外部性

4節において消費者が他人の消費の増大に対して尊敬（Admiration）と嫉妬（Jealousy）の念を抱く二つのケースを考えた。得られた結論は消費の外部性が存在しないケースおよび嫉妬の念を抱くケースにおいて定常解の安定性は常に鞍点（Saddle）であり決して非決定性（locally determinate）は生じない。それに対して尊敬の念を抱くケースにおいては、オッファーカーブの弾力性のある範囲において非決定性が生じ、経済主体の将来に対する期待の変化によりもたらされる内生的な経済変動が起こりうるということが理論的に証明された。

③ 生産の外部性

5節において生産における外部効果を考察した。ラムゼー型の代表的個人のモデルと異なり、労働の需要曲線と供給曲線が正常な形で交わるような外部性の度合いの下、定常状態の近傍において非決定性が発生することを理論的に示すことができた。言い換えるなら第

3章と異なり現実的な外部性の度合いの下、内生的な経済変動の発生を立証することができたのである。

Appendix 1 (レンマ2の証明)

(10-1)から以下の式を得る。

$$\frac{dc_i^*}{dk_i^*} = \Psi^{-1} \left(\frac{c_i^*}{k_i^*} \right), (i=1,2) \quad (1-1)$$

また, (10-2)を用いると,

$$\frac{dc_i^*}{dk_i^*} = \frac{a}{b} + (1-\delta), (i=1,2) \quad (1-2)$$

を得る。

図3より低位(高位)の定常均衡において

$$(1-1) < (>) (1-2). \quad (1-3)$$

が成立する。

さらに (13-1) と(13-2) を用いることで

$$D_i - T_i + 1$$

$$= \left(\frac{b}{a} \right) \left[-\frac{1}{\Psi} \left(\frac{c_i^*}{k_i^*} \right) + \frac{a}{b} + (1-\delta) \right]. \quad (1-4)$$

を得る。

(1-3) と (1-4)を考慮すると

$$D_1 < T_1 - 1 \text{ と } D_2 > T_2 - 1.$$

であることが分かる。さらに $g = g_s$ のとき $(1-1) = (1-2)$ より $D_i = T_i - 1$ が成立する。

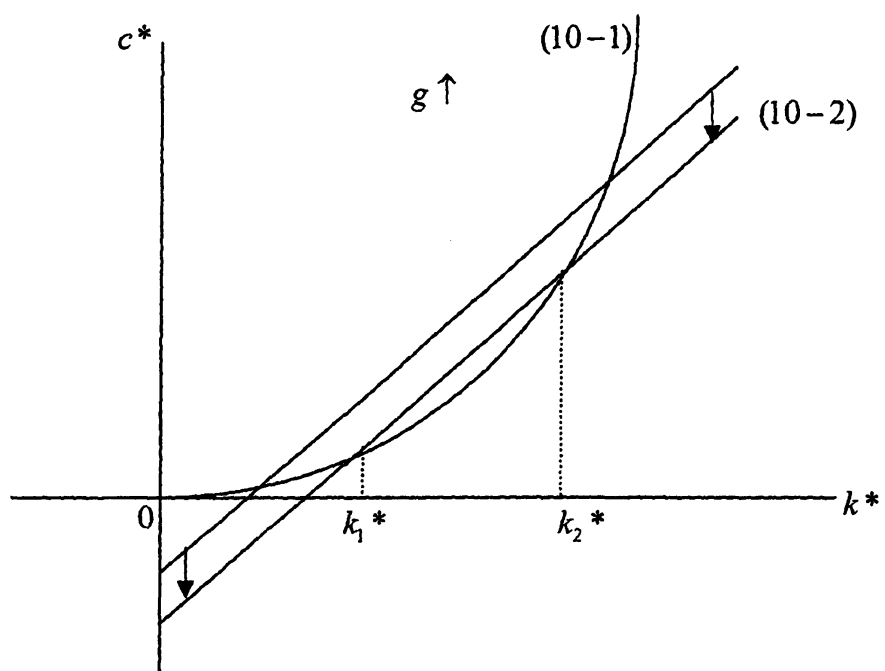


図 1: 内生的な資本所得税率

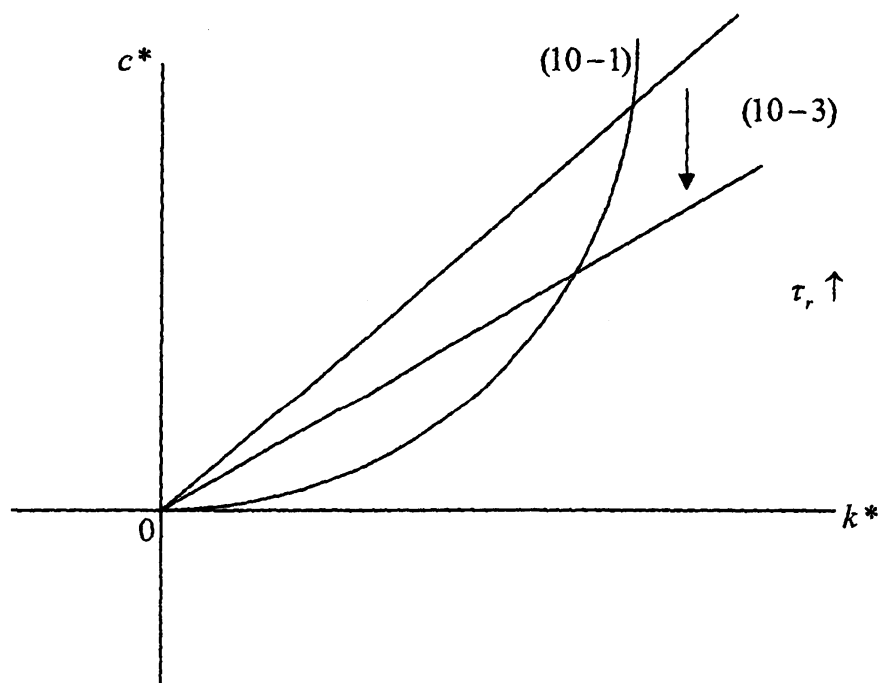


図 2: 一定値に固定された資本所得税率

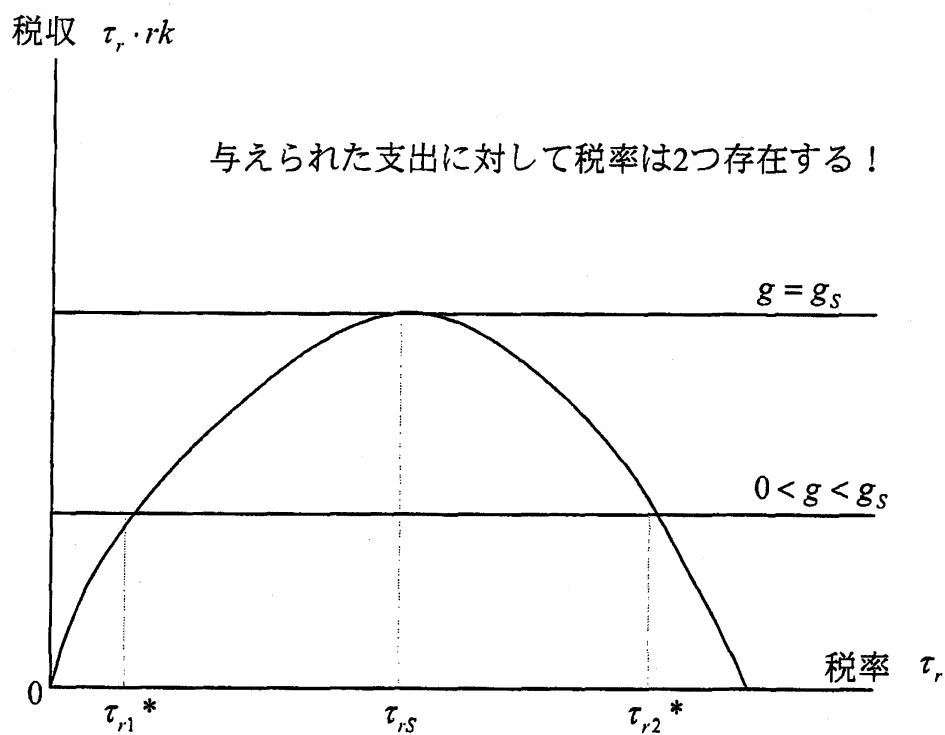


図3：内生的な資本所得税率とラフファーカーブ

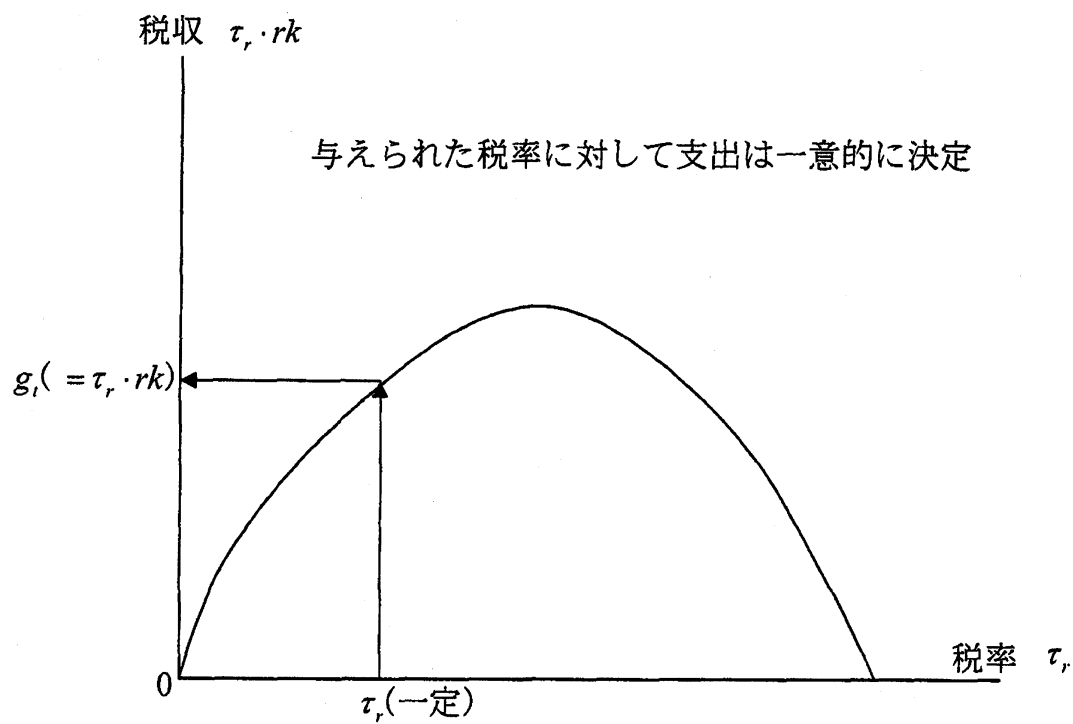


図4：外生的な資本所得税率とラフファーカーブ

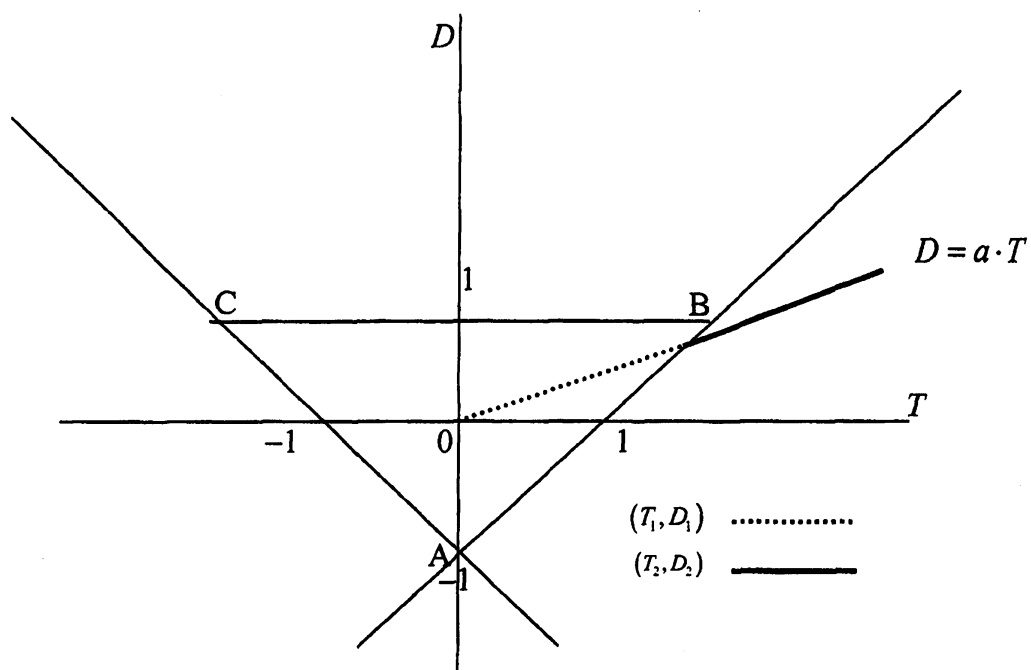


図 5 : 内生的な資本所得税率と局所的な安定性

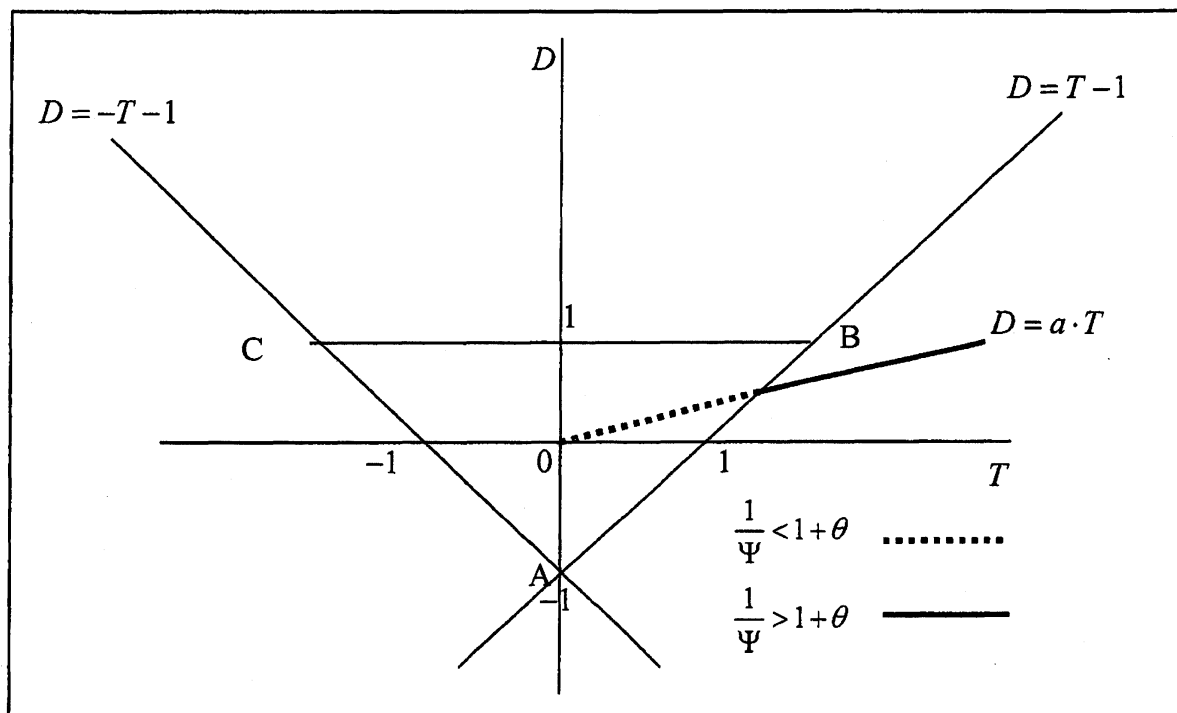


図6：消費の外部性と安定性

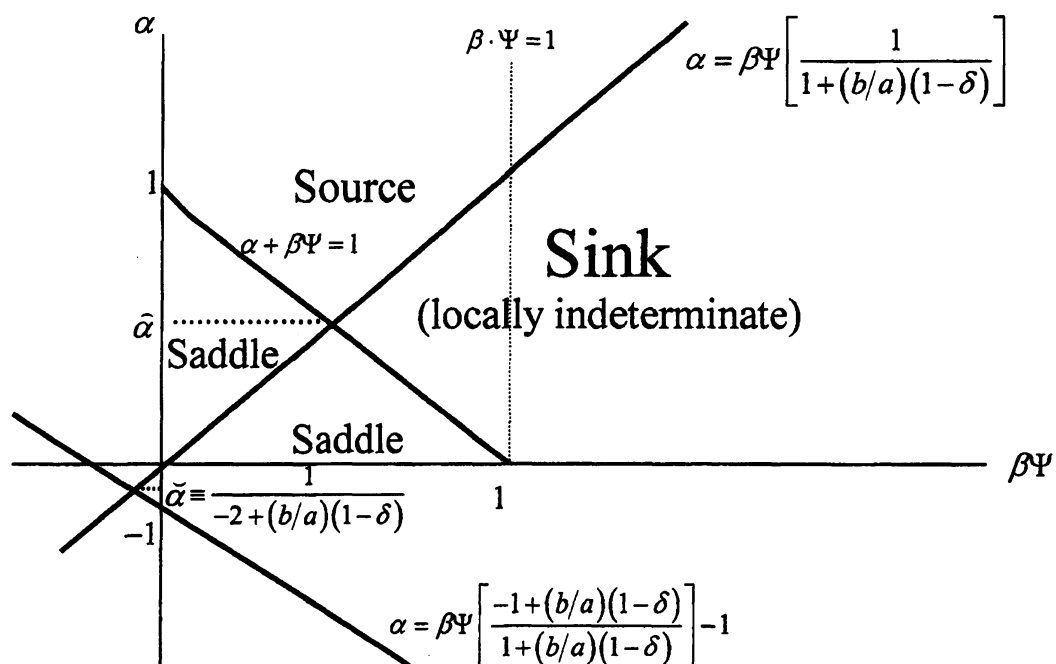


図 7 : 生産における外部性と安定性